

TIMOSHENKO KİRİLERİN SERBEST TİTREME ANALİZİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORMASYON METODU İLE İNCELENMESİ

Baran Bozyiğit¹, Seval Çatal² ve Hikmet Hüseyin Çatal³

¹ Araştırma Görevlisi, İnşaat Müh. Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

² Doçent, İnşaat Müh. Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

³ Profesör, İnşaat Müh. Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

ÖZET:

Taıyıcı sistemlerin deprem gibi dinamik yükler altında davranışı, can ve mal güvenliği açısından büyük önem arz etmektedir. Bu nedenle, günümüzde özellikle yüksek nitelikli yapı veya yapı elemanlarının tasarımında dinamik analize bir e ilim olduğu bilinmektedir. Bir sistemin dinamik analizinde en önemli parametrelerden olan doğal açısal frekans değerleri, serbest titreşim analizi ile elde edilmektedir. Bu çalışmada, her iki ucu ankastre mesnetli; bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli kirişlerin serbest titreşim analizi Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM) kullanılarak incelenmiştir. Çalışma kapsamında, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre daha gerçekçi sonuçlar veren, kayma deformasyonu ve dönme ataletinin dikkate alındığı Timoshenko kiriş teorisi (TKT) kullanılmıştır. Sistemin hareket denklemleri enerjinin korunumu esasına dayalı Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri öncelikle analitik olarak, ardından DTM uygulanarak çözülmüştür. Her üç kiriş tipi için, analitik çözümden ve DTM çözümünden elde edilen ilk üç moda ait doğal açısal frekans değerleri kıyaslanmıştır ve DTM'nin oldukça başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, ilk üç moda ait açısal frekans değerleri, uygulamada yaygın olarak kullanılan yapısal analiz programlarından SAP2000'den elde edilen sonuçlarla da kıyaslanmıştır. Çalışmada ayrıca, ilk üç moda ait mod şekilleri ve normalize edilmiş ilme momenti diyagramları sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER : Timoshenko kiriş teorisi, serbest titreşim analizi, Diferansiyel Transformasyon Metodu, doğal açısal frekans

1. GİRİŞ

Mühendislik yapılarının taıyıcı sistemlerinde sıklıkla kullanılan kirişlerde, dış yükler nedeniyle oluşan titreşimlerin analizi ve kontrolü emniyetli ve ekonomik tasarım için oldukça önemlidir. Son yıllarda, yüksek nitelikli yapı ve yapı elemanlarının tasarımında statik analizin yetersiz kaldığı kabul edilmekte olup, dinamik analiz ön plana çıkmıştır. Genel hali ile dinamik analizin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim olmak üzere iki aşamadan oluştuğu kabul edilebilir. Bir sistem için serbest titreşim analizinden elde edilen doğal açısal frekans değerleri, zorlanmış titreşim analizinden elde edilen sonuçları doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle, doğal açısal frekans değerlerinin doğru elde edilmesi, dinamik zorlamalar sonucu sistemde meydana gelecek iç tesirlerin gerçeğe olabildiğince yakın olarak hesaplanabileceği anlamına gelmektedir.

Serbest titreşim analizinde tek veya çok serbestlik dereceli hesap modellerinin kullanılması basit ve hızlı çözümler ortaya çıkarsa da, gerçek davranış yayılı kütleli hesap modellerinin kullanılması sonucu elde edilir. Yayılı kütleli hesap modellerinin serbest titreşim analizi diferansiyel hareket denklemlerinin çözümü ile mümkündür. Literatürde, farklı sistemlerin Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EKT) kullanılarak serbest titreşim analiziyle ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Banerjee ve Gunawardana (2007), hareketli Euler-Bernoulli

kiri inin serbest titre imini dinamik rijitlik metodu ile incelemi lerdir. Çalı mada, her iki ucu basit mesnetli ve her iki ucu ankastre mesnetli kiri lerin ilk üç modlarına ait açısıl frekans de erleri farklı hız ve eksenel kuvvet de erleri için elde edilm i olup, her iki sınır ko ulu için mod ekileri çizilmi tir. Ba datlı vd. (2011)'e ait bir çalı mada, eksenel do rultuda ivmelenen iki açıklıklı Euler-Bernoulli kiri inin do al açısıl frekansları Pertürbasyon teknikleri kullanılarak elde edilm i tir. Çalı mada dikkate alınan kiri in her iki ucu basit mesnetli olup, kiri açıklık ında da bir basit mesnet yer almaktadır. Çalı mada eksenel hız, e ilme rijitli i ve ara mesnetin kiri in dinamik davranı ı üzerindeki etkileri incelenmi tir. Mao ve Pietrzko (2012), tabakalı Euler kiri lerinin serbest titre imini Adomian dekompozisyon metodu ile incelemi lerdir. Çalı mada, farklı sınır ko ulları altında ilk be moda ait açısıl frekans de erleri elde edilm i ve mod ekileri çizilmi tir.

Büyük açıklıklı ve narin kiri lerde EKT kullanılarak yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilse de, kısa ve kalın kiri ler gibi kayma deformasyonlarının ön plana çıktığı sistemlerde dönme ataletinin ve kayma deformasyonlarının dikkate alındığı Timoshenko kiri teorisi (TKT)'nin kullanılması emniyetli tasarım için önem arz etmektedir. Bununla birlikte, narin kiri lerin dinamik analizinde de TKT kullanımı tasarımcı için emniyetli bölgede kalınmasını sağlamaktadır. Timoshenko kiri lerinin titre imi uzun yıllardır ara tırmacıların ilgisini çekmektedir. Han vd. (1999), kiri lerin serbest titre imini EKT, TKT, dönme ataletini dikkate alan Rayleigh teorisi ve kayma deformasyonunu dikkate alan Shear teorisini kullanarak incelemi lerdir. Çalı mada hareket denklemleri mekanik enerjinin korunumu esaslı Hamilton prensibi kullanılarak elde edilm i tir. Dört kiri teorisi arasında, e it ko ullar altında en yüksek açısıl frekans de erlerinin EKT ile, en düşük açısıl frekans de erlerinin ise TKT ile elde edildi i gözlemlenmi tir. Rosa (1994), iki parametrelili elastik zemine oturan Timoshenko kiri lerinin serbest titre imini analitik yöntemle incelemi tir. Çalı mada, her iki ucu basit mesnetli, konsol ve bir ucu ankastre bir ucu basit mesnetli kiri lerin boyutsuz do al açısıl frekans de erleri farklı zemin parametreleri için sunulmu tur. Kocatürk ve im ek (2005)'e ait bir ara tırmada, farklı sınır ko ulları ve farklı kiri geni lik/yükseklik oranları için TKT kullanılarak serbest titre im analizi incelenmi tir. Lagrange denklemlerinin çözüm için kullanıldı ı çalı mada, ilk sekiz moda ait boyutsuz açısıl frekans parametreleri tablolar halinde sunulmu tur. Su ve Banerjee (2015), fonksiyonel derecelendirilm i Timoshenko kiri lerinin serbest titre imini dinamik rijitlik metodunu kullanarak incelemi lerdir. Do al açısıl frekansların ve mod ekilerinin elde edilmesinde Wittrick-Williams algoritması kullanılmı tir. Farklı sınır ko ulları ve geometrik özellikler için ilk be moda ait açısıl frekans de erleri tablolar halinde sunulmu tur.

Altyapısı sonlu Taylor serisine dayanan ve etkili bir matematiksel teknik olan DTM, ilk kez Zhou (1986) tarafından elektrik devrelerine ait diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmı tir. DTM'yi ilk kez özde er problemine uygulayan Chen ve Ho (1996)'ya ait çalı mada, elde edilen özde er ve özvektörler analitik çözümle kıyaslanmı , yöntemin ba arılı sonuçlar verdi i gözlemlenmi tir. Malik ve Dang (1998), çe itli sınır ko ulları altındaki Euler-Bernoulli kiri lerinin serbest titre im analizinde DTM'yi kullanarak ilk üç moda ait açısıl frekans de erlerini hesaplamı larıdır. Özdemir ve Kaya (2006), de i ken enkesitli ve dönen kiri lerin titre im analizini EKT ve DTM'yi kullanarak gerçekle tirmi lerdir. Çalı mada, farklı açısıl hız ve tabaka ko ullarının do al frekanslar üzerindeki etkisi, sistemlerin ilk üç modlarına ait do al frekansların sunuldu u tablolarda görülmektedir. Demirda ve Ye ilce (2011), tepe noktasında topaklanmı kütleyle sahip, zemine dönmeye kar ı elastik yayla ba lı Timoshenko kolonunun serbest titre im için DTM'yi uygulamı larıdır. Yay ve kolon arasındaki rölatif rijitlik için tanımlanan katsayının farklı de erleri için elde edilen ilk üç moda ait açısıl frekans de erleri analitik yöntemle kıyaslanmı olup, ba arılı sonuçlar elde edilm i tir. Ye ilce ve Çatal (2011)'in ara tırmasında, elastik zemine oturan de i ken enkesitli, yarı rijit ba lı Reddy-Bickford kiri lerinin serbest titre im analizi DTM uygulanarak incelenmi tir. İlk altı moda ait açısıl frekans de erleri tablolar halinde sunulmu olup, farklı eksenel basınç kuvveti ve rijitliklerin do al açısıl frekanslar üzerindeki etkileri incelenmi tir.

Bu çalışma; her iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizi DTM kullanılarak incelenmiştir. DTM çözümünden ulaşılan sonuçlar analitik yöntem ve SAP2000'den elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır.

2. MATEMATİK HESAP MODEL VE ANALİTİK ÇÖZÜM

Çalışma kapsamında yer alan kirişler ile ilgili aşağıda sıralanan kabuller yapılmıştır:

1. Kirişlerin yapıldığı malzeme homojen ve izotropiktir.
2. Malzeme davranışları doğrusal elastiktir.
3. İkinci merteye etkiler ihmal edilmiştir.
4. Sönüm etkisi ihmal edilmiştir.
5. Eksenel deformasyonlar dikkate alınmamıştır.

Timoshenko kiriş teorisine göre $w(x,t)$ kiriş eksenine dik yerdeğiştirme fonksiyonunu, $\theta(x,t)$ kesit dönmesi fonksiyonunu göstermek üzere, çalışmaya konu edilen betonarme bacanın hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Rosa, 1994):

$$\frac{AG}{\bar{k}} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \bar{m} \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{AG}{\bar{k}} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) = 0 \quad (2)$$

Burada; \bar{m} kirişin yayılı kütlelerini, A kirişin enkesit alanını, G kirişin yapıldığı malzemenin kayma modülünü, E kirişin yapıldığı malzemenin elastisite modülünü, I kirişin alan atalet momentini ve \bar{k} kesme düzeltme katsayısını göstermektedir.

Kiriş hareketinin harmonik olduğunu varsayarak, L kirişin uzunluğu, boyutsuz konum parametresi $z = x / L$ olmak üzere; $w(x,t)$ ve $\theta(x,t)$ fonksiyonları değiştirme yöntemini kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w(z,t) = w(z) \cdot e^{i \omega t} \quad (3)$$

$$\theta(z,t) = \theta(z) \cdot e^{i \omega t} \quad (4)$$

(1) ve (2) numaralı kısmi diferansiyel denklemler, (3) ve (4) numaralı bağıntılar kullanılarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürüldükten sonra, Timoshenko kirişinin hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{AG}{\bar{k}L^2} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{AG}{\bar{k}L} \frac{d\theta}{dz} + \bar{m} \omega^2 w(z) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{EI}{L^2} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{AG}{kL} \frac{dw}{dz} + \left(\frac{\bar{m} \dot{S}^2}{A} - \frac{AG}{k} \right) w(z) = 0 \quad (6)$$

Burada; sistemin açısal frekansını ifade etmektedir.

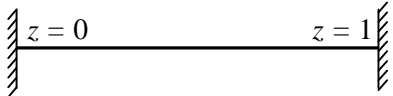
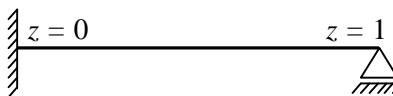
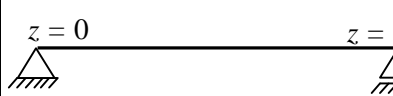
Timoshenko kirişine ait eğilme momenti $M(z)$ ve kesme kuvveti $T(z)$ fonksiyonları boyutsuz konum parametresine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M(z) = \frac{EI}{L} \frac{dw}{dz} \quad (7)$$

$$T(z) = \frac{AG}{kL} \frac{dw}{dz} - \frac{AG}{k} w(z) \quad (8)$$

Timoshenko kirişlerinin hareket denklemleri 4. mertebeden diferansiyel denklemler olduğundan, analitik çözüm için dört adet sınır koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. Çalıntıya konu edilen her iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişleri için uygulanacak sınır koşulları Tablo 1 ile sunulmaktadır:

Tablo 1. Farklı mesnetlenme durumları için uygulanacak sınır koşulları

		
$w(z=0) = 0$	$w(z=0) = 0$	$w(z=0) = 0$
$w'(z=0) = 0$	$w'(z=0) = 0$	$M(z=0) = 0$
$w(z=1) = 0$	$w(z=1) = 0$	$w(z=1) = 0$
$w'(z=1) = 0$	$M(z=1) = 0$	$M(z=1) = 0$

Sınır koşulları kullanılarak elde edilen denklem takımının çözülmesiyle sistemin açısal frekans değerlerine ulaşılmıştır.

3. DİFERANSİYEL TRANSFORMASYON METODU (DTM)

Yarı analitik kabul edilen ve sonlu Taylor serisi açılımına dayanan DTM, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkili bir nümerik yöntemdir. DTM yaklaşımlı Taylor seri açılımına dayansa da, iterasyona dayalı bir prosedür uygulanarak fonksiyonların türevleri sembolik olarak elde edilmez (Çatal, 2008). Titreşim problemlerine ait diferansiyel hareket denklemleri, DTM'ye özgü transfer fonksiyonları kullanılarak sınır koşulları bir takım cebirsel denklemler olarak elde edilir. Bu cebirsel denklemlerin çözüm kümesi, serbest titreşim analizi uygulanan sistemin özdeğerleridir (Yeşilce, 2010).

Tek boyutlu DTM için, uygulamada sıkça kullanılan fonksiyonlar ve sınır koşulları sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 3'de sunulmuştur (Çatal, 2008).

Tablo 2. Tek boyutlu DTM için temel teoremler

Orijinal Fonksiyon	Transfer Edilmiş Fonksiyon
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = a \cdot u(x)$	$W(k) = a \cdot U(k)$
$w(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$	$W(k) = \frac{(k+m)!}{k!} \cdot U(k+m)$
$w(x) = u(x) \cdot v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) \cdot V(k-r)$

Tablo 3. Sınır koşulları için tek boyutlu DTM teoremleri

$x = 0$		$x = 1$	
Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları	Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları
$w(0) = 0$	$W(0) = 0$	$w(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} W(k) = 0$
$\frac{dw(0)}{dx} = 0$	$W(1) = 0$	$\frac{dw(1)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot W(k) = 0$
$\frac{d^2 w(0)}{dx^2} = 0$	$W(2) = 0$	$\frac{d^2 w(1)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot W(k) = 0$
$\frac{d^3 w(0)}{dx^3} = 0$	$W(3) = 0$	$\frac{d^3 w(1)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot W(k) = 0$

3.1 DTM'nin Timoshenko Kiri için Hareket Denklemlerine Uygulanması

DTM çözümü için (5) ve (6) numaralı hareket denklemleri sırasıyla, (9) ve (10) numaralı e-tiliklerle belirtilen formda yazılabilirler:

$$\frac{AG}{kL^2} \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{AG}{kL} \frac{d w}{dz} - \bar{m} \bar{S}^2 w(z) \quad (9)$$

$$\frac{EI}{L^2} \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{AG}{kL} \frac{dw}{dz} - \left(\frac{\bar{m} I \bar{S}^2}{A} - \frac{AG}{k} \right) w(z) \quad (10)$$

(7), (9) ve (10) numaralı bağıntılar için aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır:

$$K1 = \frac{\frac{AG}{kL}}{\frac{AG}{kL^2}}; K2 = \frac{-\bar{m}\bar{S}^2}{\frac{AG}{kL^2}}; K3 = \frac{-\frac{AG}{kL}}{\frac{EI}{L^2}}; K4 = \frac{-\left(\frac{\bar{m}I\bar{S}^2}{A} - \frac{AG}{k}\right)}{\frac{EI}{L^2}}; K5 = \frac{EI}{L};$$

(9) ve (10) numaralı e itliklere Tablo 2 ile sunulan teoremler kullanılarak DTM uygulanırsa (11) ve (12) numaralı e itlikler elde edilir:

$$W(k+2) = \frac{K1 \cdot (k+1)}{(k+2)} + \frac{K2 \cdot W(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (11)$$

$$(k+2) = \frac{K3 \cdot W(k+1)}{(k+2)} + \frac{K4 \cdot (k)}{(k+1)(k+2)} \quad (12)$$

Burada; $W(k)$ ve (k) sırasıyla, deplasman ve kesit dönmesi fonksiyonlarının transfer edilmiş fonksiyonlarıdır.

$\bar{M}(k)$, $M(z)$ e ilme momenti fonksiyonunun transfer edilmiş fonksiyonu olmak üzere; her iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişlerinin sınır koşulları ve transfer edilmiş sınır koşulları Tablo 4’de sunulmuştur.

Tablo 4. Ankastre - Ankastre, Ankastre - Basit ve Basit - Basit mesnetlenme durumları için orijinal ve transfer edilmiş sınır koşulları

$z = 0$		$z = 1$	
Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları	Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları
Ankastre - Ankastre			
$y(0)=0$ $(0)=0$	$W(0)=0$ $(0)=0$	$y(1)=0$ $(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\bar{N}} W(k) = \sum_{k=0}^{\bar{N}} \varphi(k) = 0$
Ankastre - Basit			
$y(0)=0$ $(0)=0$	$W(0)=0$ $(0)=0$	$y(1)=0$ $M(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\bar{N}} W(k) = \sum_{k=0}^{\bar{N}} \bar{M}(k) = 0$
Basit - Basit			
$y(0)=0$ $M(0)=0$	$W(0)=0$ $(1)=0$	$y(1)=0$ $M(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\bar{N}} W(k) = \sum_{k=0}^{\bar{N}} \bar{M}(k) = 0$

Yöntemin bir sonraki aşamasında, Tablo 4 ile verilen transfer edilmiş sınır koşulları, (11) ve (12) numaralı eklemlerde yerine yazılmalıdır. Her iki ucu ankastre mesnetli ve bir ucu ($z=0$) ankastre diğer ucu ($z=1$) basit mesnetli kirişler için $W(1) = C_1$, $W(0) = C_2$; her iki ucu basit mesnetli kiriş için $W(1) = C_1$, $W(0) = C_2$ alınarak (13) numaralı eklemlerde edilir:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{\bar{N}}(\omega) & A_{12}^{\bar{N}}(\omega) \\ A_{21}^{\bar{N}}(\omega) & A_{22}^{\bar{N}}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Burada; \bar{N} seri boyutu, C_1 ve C_2 denklem takımındaki katsayılardır. $A_{j1}^{\bar{N}}(\omega)$ ve $A_{j2}^{\bar{N}}(\omega)$ ($j=1,2$) ise ilgili \bar{N} degerine karşılık gelen, ω degerine bağlı polinomlardır. (13) ekleminde yer alan katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eitleyen ω degerleri, sistemin doğal açısal frekans degerleri olarak elde edilir.

4. SAYISAL ANALİZ

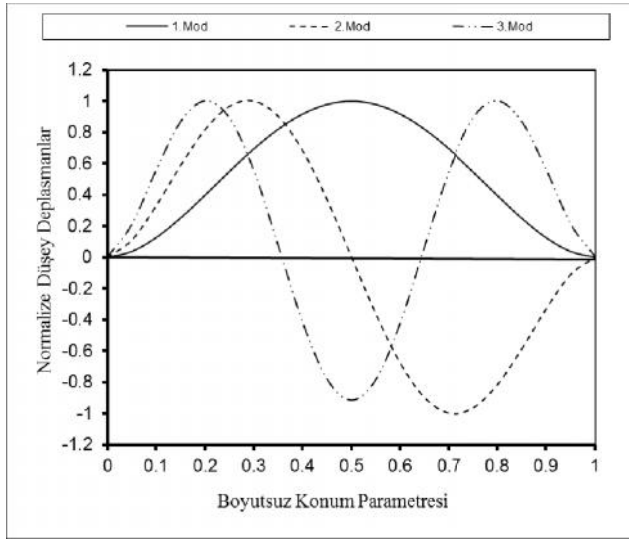
Sayısal analizde kullanılan kiriş modelleri için, $L = 8$ m, $A = 0.15$ m², $\bar{m} = 0.382263$ kN.sn²/m, $I = 0.003125$ m⁴, $E = 30000000$ kN/m², $G = 11538461.54$ kN/m², $\bar{k} = 1.20$ alınmıştır. Çalış mada kullanılan, farklı sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin ilk üç modlarına ait açısal frekans degerleri DTM, analitik yöntem ve SAP2000 yapısal analiz programı kullanılarak elde edilmiş ve sayısal degerler Tablo 5 ile sunulmuştur.

Tablo 5. Farklı mesnet koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin ilk üç modlarına ait açısal frekans degerleri

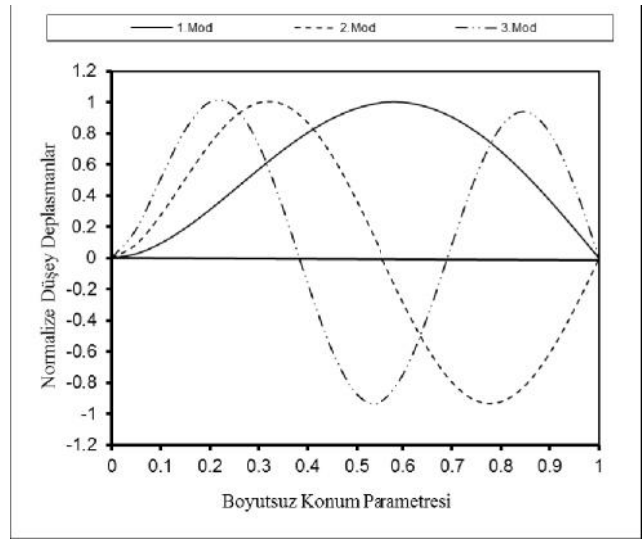
Yöntem	Sınır Koşulları									
	\bar{N}	Ankastre - Ankastre			Ankastre - Basit			Basit - Basit		
		1(rad/sn)	2(rad/sn)	3(rad/sn)	1(rad/sn)	2(rad/sn)	3(rad/sn)	1(rad/sn)	2(rad/sn)	3(rad/sn)
DTM	12	168.6203	-	-	117.4781	-	-	75.8710	297.3256	-
	14	168.6200	449.7358	-	117.4781	371.0428	-	75.8710	297.7674	-
	18	168.6200	449.9802	-	117.4781	371.0817	747.6140	75.8710	297.7709	650.4101
	16	168.6200	449.9802	-	117.4781	371.0817	747.6140	75.8710	297.7709	650.3998
	22	168.6200	449.9802	847.5801	117.4781	371.0817	747.7987	75.8710	297.7709	650.3998
	24	168.6200	449.9802	847.5800	117.4781	371.0817	747.4987	75.8710	297.7709	650.3998
Analitik		168.6200	449.9802	847.5800	117.4781	371.0817	747.4987	75.8710	297.7709	650.3998
SAP2000		168.8969	452.6978	857.4192	117.6212	373.2943	756.3663	75.9774	299.4839	658.1677

Tablo 5’de görüldüğü üzere, en yüksek doğal açısal frekans degerleri her iki ucu ankastre mesnetli sistemde, en düşük doğal açısal frekans degerleri ise her iki ucu basit mesnetli sistemde görülmüştür. DTM kullanılarak hesaplanan doğal açısal frekans degerlerinin analitik yöntemden elde edilen sonuçlara yeterli terim sayısı kullanıldığında oldukça bağımsız bir hassasiyetle yakınsadığı görülmektedir. DTM’den elde edilen sonuçlar incelendiğinde; her iki ucu ankastre mesnetli kirişte gerekli yakınsama için terim sayısı 14 - 24 arasında, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş için 12 - 22 arasında, her iki ucu basit mesnetli kiriş için 12 - 16 arasında degermektedir.

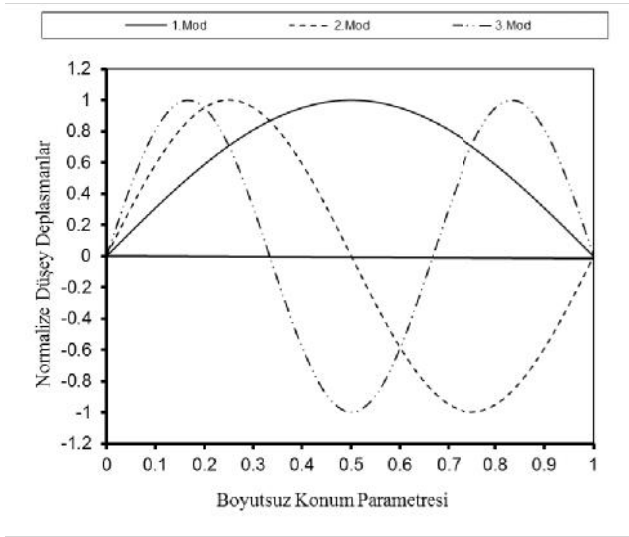
Şekil 1 (a), (b) ve (c)’de sırasıyla; her iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişlerinin ilk üç modlarına ait mod şekilleri yer almaktadır. Şekil 1 (d)’de ise her üç kiriş modelinin hakim moduna ait mod şekilleri sunulmuştur. Şekil 1 (d)’den anlaşıldığı gibi, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli sistemde maksimum deplasman basit mesnete daha yakın bir konumda olmaktadır.



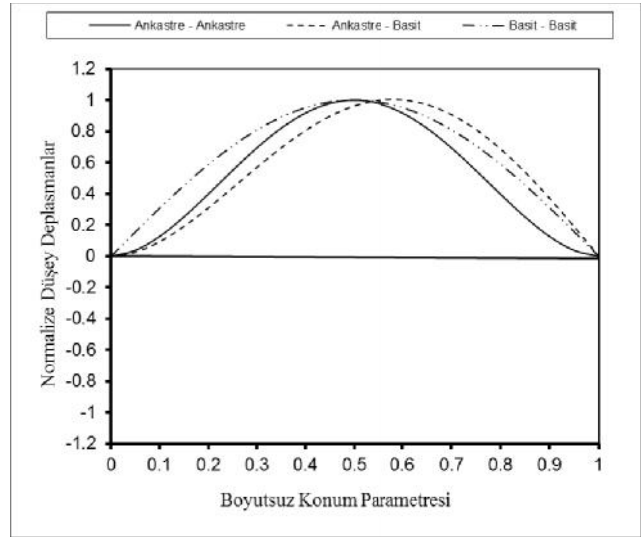
(a)



(b)



(c)

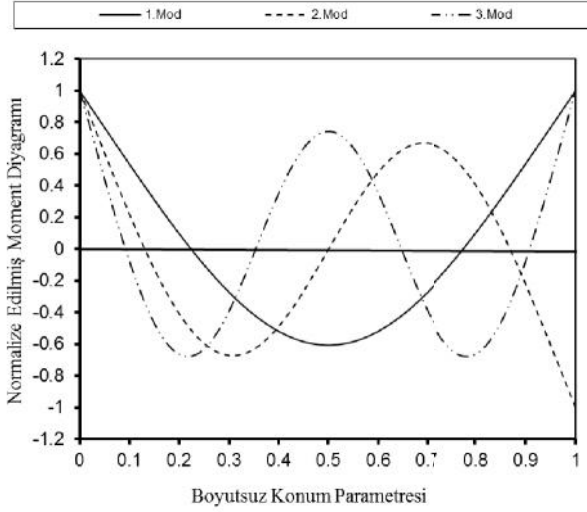


(d)

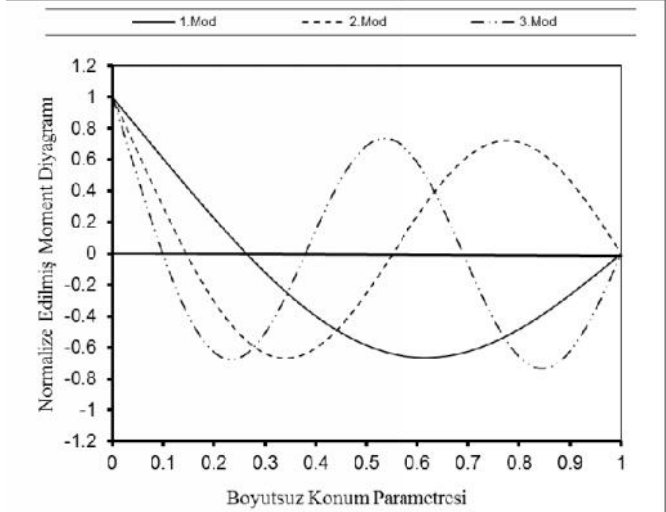
- ekil 1. (a) Her iki ucu ankastr mesnetli Timoshenko kirişinin ilk üç mod şekli.
(b) Bir ucu ankastr, diğer ucu basit mesnetli Timoshenko kirişinin ilk üç mod şekli.
(c) Her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişinin ilk üç mod şekli.
(d) Çalı madde kullanılan her üç kiriş modelinin hakim modlarına ait mod şekilleri.

ekil 2 (a), (b) ve (c)'de sırasıyla; her iki ucu ankastr mesnetli, bir ucu ankastr diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişlerinin ilk üç modlarına ait normalize edilmiş eilme momenti diyagramları bulunmaktadır. ekil 2 (d)'de ise; her üç kiriş modelinin hakim moduna ait eilme momenti diyagramları sunulmuştur. ekil 2 incelendiğinde; her iki ucu ankastr mesnetli kirişte maksimum eilme momentinin kiriş mesnetlerinde meydana geldiği, bir ucu ankastr diğer ucu basit mesnetli kirişte maksimum

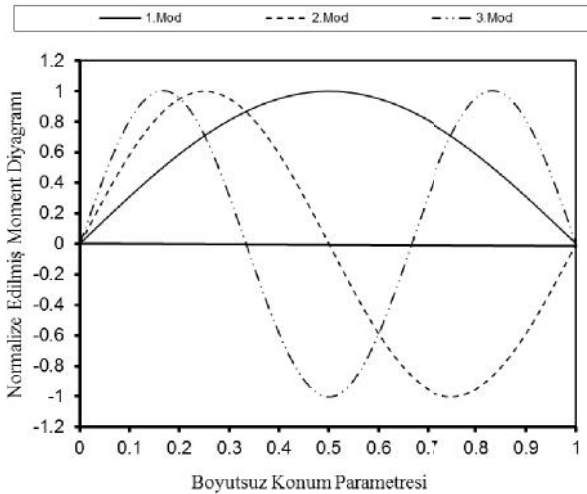
Her iki ucu ankastre mesnetli Timoshenko kirişinin, her iki ucu basit mesnetli kirişe ise maksimum eğilme momentinin kirişin orta noktasında olduğu anlaşılmaktadır.



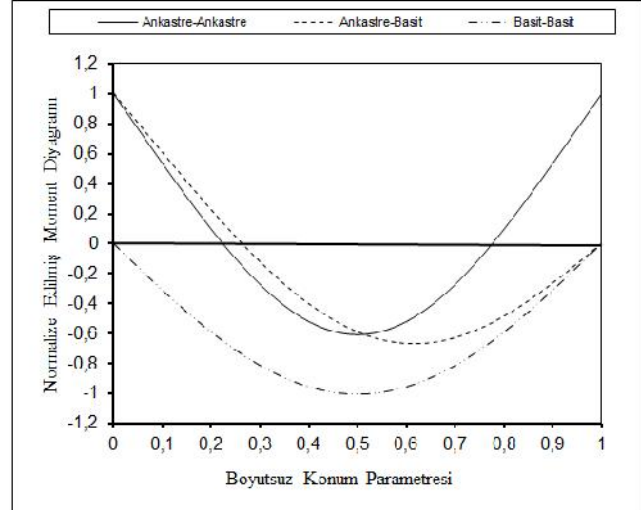
(a)



(b)



(c)



(d)

- ekil 2. (a) Her iki ucu ankastre mesnetli Timoshenko kirişinin normalize edilmiş eğilme momenti diyagramı.
(b) Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli Timoshenko kirişinin normalize edilmiş eğilme momenti diyagramı.
(c) Her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kirişinin normalize edilmiş eğilme momenti diyagramı.
(d) Çalınan malzeme kullanılan her üç kiriş modelinin hakim modlarına ait normalize edilmiş eğilme momenti diyagramı.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, farklı sınır koşullarına sahip kirişlerin serbest titreşimi Timoshenko kiriş teorisi ve Diferansiyel Transformasyon Metodu kullanılarak incelenmiştir. İlk üç moda ait doğal açısal frekans değerleri analitik olarak, DTM kullanılarak ve SAP2000 yapısal analiz programı ile hesaplanmıştır ve karşılaştırılarak sunulmuştur. Mod şekilleri ve normalize edilmiş eğilme momenti diyagramları çizilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre DTM, Timoshenko kirişlerinin hareket denklemlerinin çözümünde oldukça etkili sonuçlar vermektedir. Yakın sonuçlar olsa da, SAP2000 ile hesaplanan doğal açısal frekans değerlerinin ilk modun ardından az da olsa gerçek sonuçtan uzaklaşmaya başladığı görülmektedir. Bu durumun sebebi; kayma deformasyonlarının dikkate alınmadığı modeller için, SAP2000'de topraklanmış kütle sayısı çok fazla artırılırsa da teorik olarak yayılı kütleli çözüm yapılamaması olarak yorumlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Bağdatlı, S. M., Özkaya, E. ve Öz, H. R. (2011). Dynamics of axially accelerating beams with an intermediate support. *Journal of Vibration and Acoustics*, **133(031013)**, 1-10.
- Banerjee, J. R. ve Gunawardana, W. D. (2007). Dynamic stiffness matrix development and free vibration analysis of a moving beam. *Journal of Sound and Vibration*, **303(1-2)**, 135-143.
- Chen, C.K. ve Ho, S.-H. (1996). Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, **79(2-3)**, 173-188.
- Çatal, S. (2008). Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method. *Applied Mathematical Modelling*, **32(9)**, 1744-1757.
- De Rosa, M. A. (1995). Free vibrations of Timoshenko beams on two – parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, **57(1)**, 151 – 156.
- Demirdag, O. ve Yesilce, Y. (2011). Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method. *Advances in Engineering Software*, **42(10)**, 860-867.
- Han, S. M., Benaroya, H. ve Wei, T. (1999). Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. *Journal of Sound and Vibration*, **225(5)**, 935-988.
- Kocatürk, K. ve İmrek M. (2005). Free vibration analysis of Timoshenko beams under various boundary conditions. *Journal of Engineering and Natural Sciences*, **2005/1**, 30 – 44.
- Malik, M. ve Huy Dang, H. (1998). Vibration analysis of continuous systems by differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*, **96(1)**, 17-26.
- Matlab R2014b (2014). The MathWorks, Inc.
- Mao, Q. ve Pietrzko S. (2012). Free vibration analysis of a type of tapered beams by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, **219(6)**, 3264 – 3271.
- Özdemir, Ö. ve Kaya, M. O. (2006). Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method. *Journal of Sound and Vibration*, **289(1-2)**, 413-420.

SAP2000 V16.0.0. Integrated Solution For Structural Analysis & Design, Computer & Structures Inc., USA.

Su, H. Ve Banerjee, J. R. (2015). Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams. *Computers and Structures*, **147(2015)**, 107 – 116.

Yesilce, Y. (2010). Differential transform method for free vibration analysis of a moving beam. *Structural Engineering and Mechanics*, **35(5)**, 645-658.

Yesilce, Y. ve Catal, H. H. (2011). Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, **81(2)**, 199-213.

Zhou, J. K. (1986). Differential transformation and its applications for electrical circuits. *Wuhan: Huazhong University Press*.