YAPISAL ELEMANLARIN TİTREŞİM FREKANSLARININ ANALİZİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU TIMOSHENKO KİRİŞ ELEMANI

O. Soydaş[1] ve A. Sarıtaş[2]

[1] *Doktora Öğrencisi, İnşaat Müh. Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara*
[2] *Doçent Doktor, İnşaat Müh. Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara*
E-posta: ozansoydas@gmail.com

ÖZET:

Bu çalışmada, yapısal elemanların titreşim frekanslarının belirlenmesinde yüksek doğrulukta sonuçlar veren karma formülasyon bir Timoshenko kiriş elemanı sunulmaktadır. Türetilmesinde üç alanlı Hu-Washizu varyasyonelini temel alan eleman, iki uç düğüm noktası ve her bir düğüm noktasında altı serbestlik derecesine sahiptir. Kesit kuvvetleri için yararlanılan şekil fonksiyonları, titreşim frekanslarının tespit edilebilmesi için eleman boyunca deplasman değeri kullanılmadan sadece uç düğüm noktalarındaki deplasman değerlerinin kullanılmasının yeterli olmasına imkan verecek şekilde seçilmiştir. Sunulan eleman için geliştirilen tutarlı kütle matrisi de kendi türetim temeli ile uyumlu olarak elde edilmiştir. Önerilmekte olan eleman, yapısal elemanların sadece ilk titreşim frekanslarının değil aynı zamanda yüksek dereceli titreşim frekanslarının da büyük bir doğrulukla tespit edilebilmesine olanak tanımaktadır. Bu durum, konsol bir kirişin titreşim frekanslarının, önerilmekte olan karma formülasyon eleman, benzer özelliklerdeki deplasman temelli eleman ve literatürdeki kapalı form çözümler kullanılarak karşılaştırılması yoluyla ortaya konulmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Kiriş sonlu elemanı, karma formülasyon, Hu-Washizu varyasyoneli, titreşim frekansı.

1. GİRİŞ

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen analizlerde yığılı (lumped) ya da tutarlı (consistent) kütle matrisi kullanılmaktadır. Bina tipi yapıların dinamik analizinde yığılı kütle matrisinin kullanımı pratik olması sebebiyle tercih edilse de; baca, rüzgar türbini, nükleer tesisler, barajlar gibi özel yapılarda tutarlı kütle matrisinin kullanımı daha doğru sonuçlar elde etmek açısından önem arz etmektedir.

Bugüne kadar yapısal elemanların serbest titreşim frekanslarının tespit edilmesine ve bu yönde modeller oluşturulmasına yönelik birçok çalışma yapılmıştır. Çalışmaların sayısının çokluğu ve çeşitliliği göz önünde bulundurulduğunda ve ayrıca makalede sunulan çalışmanın özüyle de uyumlu olarak yalnızca kiriş (çubuk) elemanlarına ilişkin kaynakçaya yer verilecektir.

Timoshenko birbirini izleyen iki çalışmasında kesme düzeltmesinin dönel eylemsizlikten daha önemli olduğunu ve enine titreşimin (transverse vibration) dalga boyunun kesidin boyutlarına kıyasla daha büyük olması durumunda her iki etkinin ihmal edilebileceğini belirmiştir. Ayrıca, dalga boyundaki azalmaya paralel olarak kesme düzeltme katsayısının (shear correction coefficient) artması gerektiğini vurgulamıştır (Timoshenko (1921); Timoshenko (1922)).

Cook, Malkus vd. (1989) yapısal sistemin maruz kaldığı uyarmanın frekansının, yapının en düşük doğal titreşim frekansının üçte birinden daha düşük olması durumunda eylemsizlikten kaynaklanan etkilerin ihmal

edilebilmesinin mümkün olduğunu belirtmiştir. Bunun yanında kesme deformasyonu ve dönel eylemsizlik etkisinin yapının temel titreşim frekansından ziyade yüksek dereceli titreşim frekanslarının belirlenmesinde önemli olduğu bilinmektedir (Chopra (2000)).

Huang (1961) çalışmasında kesme deformasyonu ve dönel eylemsizliğin etkilerini konsol kiriş elemanda göstermiştir. Cheng (1970) çeşitli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş elemanlarını karşılaştırarak dönel eylemsizlik ve kesme deformasyonunun yapısal titreşimlerin özdeğerleri üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Tessler ve Dong (1981) aynı etkileri göz önünde bulundurmalarının yanı sıra, çalışmalarında tutarlı kütle matrisi kullanarak sabit kesitli basit kiriş için titreşim frekansları sunmuştur.

Tutarlı kütle matrisine sahip, sabit kesitli iki ve üç boyutlu deplasman temelli kiriş sonlu elemanlarına ilişkin olarak literatürde birçok çalışma mevcuttur (Archer (1965); Przemieniecki (1968); Thomas, Wilson vd. (1973); Friedman ve Kosmatka (1993)). Kuvvet temelli veya diğer bir deyişle karma formülasyona dayanan kiriş sonlu eleman türetimleri açısından şu ana kadar sadece Molins, Roca vd. (1998) tarafından sunulan Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan kemer kiriş elemanı çalışması mevcuttur. O çalışmadaki sayısal analizlerdeyse tarihi kemer köprü yapılarla ilgili bir sunum yapılmış ve literatürde çözümleri verilen titreşim frekans değerleri ile doğrulama çalışması gerçekleştirilmemiştir.

Kapalı form çözümleri olarak ise Huang ve Kung (1963) konsol Timoshenko kiriş elemanı ve normal titreşim modları için yeni özfonksiyon tabloları sunmuştur. Grant (1978) çalışmasında dönel eylemsizlik ve kesme deformasyonunun, yayılı kütle ve ayrıca rastgele yerleştirilmiş yığılı kütle de bulunan sabit kesitli kiriş elemanının titreşim frekansı üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Swaminadham ve Michael (1979) ise serbest ucunda oldukça ağır bir kütle bulunan konsol kiriş için frekans denklemini türetmiştir. Bir başka çalışmada ise To (1982), serbest ucunda kütle bulunan ve tabandan titreşim verilen konsol kiriş elemanının doğal titreşim frekanslarını, uçtaki kütlenin ağırlık merkezi ile kirişin ucundaki mesafeyi de dikkate alarak hesaplamıştır. Bunun yanında, ucunda toplanmış kütle bulunan konsol kiriş elemanının kesit alanındaki değişimi göz önünde bulunduran çalışma Rossi, Laura vd. (1990) tarafından sunulmuştur. Leissa ve So (1995), elastik malzemeli katı dairesel kesitli silindirlerin üç boyutlu serbest titreşim analizi için bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntemle çeşitli sınır koşullarına sahip kirişlerin yüksek titreşim modlarında dahi güvenilir sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca, elde edilen frekanslar, bilinen basit ve daha da geliştirilmiş bir boyutlu teorik frekans değerleri ile karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada yazarlar tarafından daha önceden geliştirilmiş olan (Soydas ve Saritas (2013)) ve sadece statik şartlar dikkate alınarak lineer ve nonlineer durumlar altında doğrulaması yapılan sonlu kiriş karma formülasyon elemanı modelinin serbest titreşim özelliklerinin tespit edilmesi amaçlanmıştır. Geliştirilmiş olan kiriş elemanı üç alanlı Hu-Washizu prensibine dayanmakta ve ayrıca eksenel yük, her iki yönde eğilme ve kesme ve ayrıca burulma momenti arasındaki etkileşimi yüksek doğrulukta yakalayabilmektedir. Bu makalede sunulan çalışmada ise, geliştirilen karma formülasyon eleman için tutarlı kütle matrisinin türetimi anlatılacak ve bu eleman kullanılarak, ucunda yığılı kütle bulunan ve bulunmayan konsol kiriş eleman için literatürdeki kapalı formda elde edilen teorik değerlerle karşılaştırılmalar sunulacaktır.

2. KİRİŞ ELEMANININ SERBEST TİTREŞİMİ

2.1. Dinamik Denklemler

Bir yapı elemanının dinamik tepkisi, deplasman temelli yaklaşım kullanılarak küçük deplasmanlar için elemana etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı işin, eylemsizlik, viskoz ve iç kuvvetlerin yaptığı işe eşit olduğu varsayımı yapılarak aşağıdaki denklem ile temsil edilebilir (Cook, Malkus vd. (1989));

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}d\Gamma + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \delta\mathbf{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\mathrm{i}} = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}d\Omega + \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho\ddot{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\kappa_{\mathrm{d}}\dot{\mathbf{u}} \tag{1}$$

Denklem (1)'de, $\mathbf{b}$ elemanın kendisinden kaynaklanan bünye gerilmelerini, $\mathbf{t}$ yayılı yüklerden kaynaklanan gerilmeleri, $\mathbf{p}_{\mathrm{i}}$ elemanın "n" farklı noktasına etki eden ve genellikle düğüm noktalarına etki eden konsantre yükleri, $\boldsymbol{\varepsilon}$ birim şekil değiştirmeleri, $\boldsymbol{\sigma}$ gerilmeleri, ρ malzemenin kütle yoğunluğunu, κ_{d} malzeme sönümlemesine ilişkin bir parametreyi ve Ω eleman tanım hacmini ve Γ eleman tanım sınırı ya da yüzeyini göstermektedir. Deplasman alanı, $\mathbf{u}$ ve onun zamana göre ilk iki türevi aşağıdaki eşitlikte gösterildiği gibi nokta işareti ile temsil edilmiştir.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{u}} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}) \qquad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}) \tag{2}$$

Denklem (2)'de, Friedman ve Kosmatka (1993) çalışmasında 2 boyut için türetilmiş şekil fonksiyonlarının üç boyuta uyarlanmasıyla elde edilmiş olan şekil fonksiyonları kullanılmaktadır ve bu fonksiyonlar $\mathbf{N}$ ile gösterilmektedir. Denklem (2)'nin, Denklem (1)'de uygun yerlere yerleştirilmesi ve gerekli düzenlemelerin yapılması durumunda aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\delta\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}d\Omega + \int_{\Omega} \rho\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}d\Omega\,(\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \int_{\Omega} \kappa_{\mathrm{d}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}d\Omega\,(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}) - \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}d\Gamma - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{p}_{\mathrm{i}}\right] = 0 \tag{3}$$

Denklem (3) kullanılarak, elemanın kütle $\boldsymbol{m}$ ve sönümleme $\boldsymbol{c}$ matrisleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\boldsymbol{m} = \int_{\Omega} \rho\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}d\Omega; \qquad \boldsymbol{c} = \int_{\Omega} \kappa_{\mathrm{d}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}d\Omega \tag{4}$$

Eğer (4) numaralı denklemler Denklem (3)'te yerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\boldsymbol{m}(\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \boldsymbol{c}(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}) + \boldsymbol{r}_{int} = \boldsymbol{r}_{ext} \tag{5}$$

Denklem (5)'te iç ve dış kuvvet vektörleri sırasıyla $\boldsymbol{r}_{int}$ ve $\boldsymbol{r}_{ext}$ olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\boldsymbol{r}_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}d\Omega; \qquad \boldsymbol{r}_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}d\Gamma + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{p}_{\mathrm{i}} \tag{6}$$

Denklem (5), elemanı oluşturan malzemenin lineer ya da nonlineer olmasına bakılmaksızın yapıların dinamik analizinde kullanılabilir. Eğer eleman üzerindeki gerilmeler birim şekil değiştirmelerin fonksiyonu ise iç kuvvet vektörü, rijitlik matrisi $\boldsymbol{k}$ kullanılarak bulunabilir. Bu durumda Denklem (5) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\boldsymbol{m}(\ddot{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{c}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r}_{ext} \tag{7}$$

Eğer analizi yapılan sisteme etkiyen herhangi bir dış kuvvet ve sönümleme olmadığı varsayılırsa, tüm yapının serbest titreşim analizi aşağıdaki ifade kullanılarak yapılabilir;

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Bu şekilde elde edilen kütle matrisi "tutarlı kütle matrisi" olarak adlandırılır; çünkü kütle matrisini elde etmekte kullanılan şekil fonksiyonları rijitlik matrisini elde etmek için kullanılan şekil fonksiyonları ile aynıdır. Bunun yanında, şekil fonksiyonlarının kesme deformasyonlarını ve dönel eylemsizlik etkilerini içermesi nedeniyle kütle matrisi de belirtilen etkileri ihtiva edecektir. Yığılı kütle matrisi kullanımı, sistemde mevcut olan kütleyi düğüm noktalarına toplaması itibariyle dinamik analiz sırasında tercih edilebilir ancak bu durumda kesme deformasyonları ve dönme serbestlik derecelerinin ek olarak düşünülmemesi halinde dönel eylemsizlikten kaynaklanan etkiler ihmal edilecektir.

Tutarlı kütle matrisi, yığılı kütle matrisinde ihmal edilen etkileri dikkate alır ve her iki kütle matrisi de analizi yapılan sistemin yapısal özelliklerine göre tercih edilebilir. Yığılı kütle matrisi, köşegen matris olması nedeniyle daha az işlemle yapısal sistemlerin çözümüne imkan tanır. Dönel serbestlik derecelerinin, yığılı kütle matrislerinden statik indirgeme (static condensation) ile elenebilmesi mümkün olmasına karşın tutarlı kütle matrislerinde dönel ve öteleme serbestlik derecelerinin ihmal edilmesi mümkün değildir (Clough ve Penzien (2003)). Ancak, köprü, baca, rüzgar türbini, baraj, nükleer tesis, vb. gibi bazı yapı türleri için yığılı kütle matrisinin kullanımı özellikle tercih edilmemektedir (Chopra (2000)).

2.2. Tutarlı Kütle Matrisi Türetimi

Bu makalede, 3 boyutlu ve Timoshenko kiriş teorisine dayanarak türetilen karma formülasyon kiriş elemanı için tutarlı kütle matrisi Molins, Roca vd. (1998) tarafından sunulan türetim yöntemi dikkate alınarak elde edilmiştir. Geliştirilen elemanın statik şartlar altındaki türetimi üç alanlı Hu-Washizu prensibine dayanmaktadır ve detaylı bilgi Soydas ve Saritas (2013)'ın çalışmasında mevcuttur.

Tutarlı kütle matrisinin türetiminde rijit modlardan arındırılmış bir kiriş dikkate alınmaktadır. Sol tarafından ankastre kiriş durumu kullanılarak kesit üstünde malzeme noktalarında yoğunluk değerlerinden kesit kütle matrisi hesaplanmıştır. Kesit kütlelerinin her üç eksen etrafında oluşturduğu etkilerin eleman boyunca yayılı olarak dağıldığı da dikkate alınırsa konsol kirişin serbest ucundaki deplasmanların hesaplanabilmesi de mümkün olabilmektedir. Bu hesaplama yöntemiyle eleman ucunda oluşan deplasmanlar sonucu, kiriş üstünde herhangi bir noktada oluşacak şekil değiştirmeler elde edilebilmektedir. Yani bir nevi deplasman temelli formülasyonun dayandığı deplasman enterpolasyon fonksiyonlarının türetilmesi mümkün olmaktadır. Bu şekilde türetilen tutarlı kütle matrisi deplasman temelli formülasyondan tamamen bağımsızdır ve tutarlı kütle matrisinin elde edilmesi kuvvet temelli (karma) formülasyona dayanmaktadır. Böylece değişken geometri, homojen olmayan malzeme dağılımı ve hatta esnek bağlantılar içeren durumlar için de tutarlı kütle matrisinin elde edilebilmesi mümkün olmaktadır.

Bu çalışmada elde edilen tutarlı kütle matrisinin sabit kesitli homojen kiriş durumu için Friedman ve Kosmatka (1993) tarafından sunulan kiriş elemanının tutarlı kütle matrisi ile aynı olduğu tespit edilmiştir.

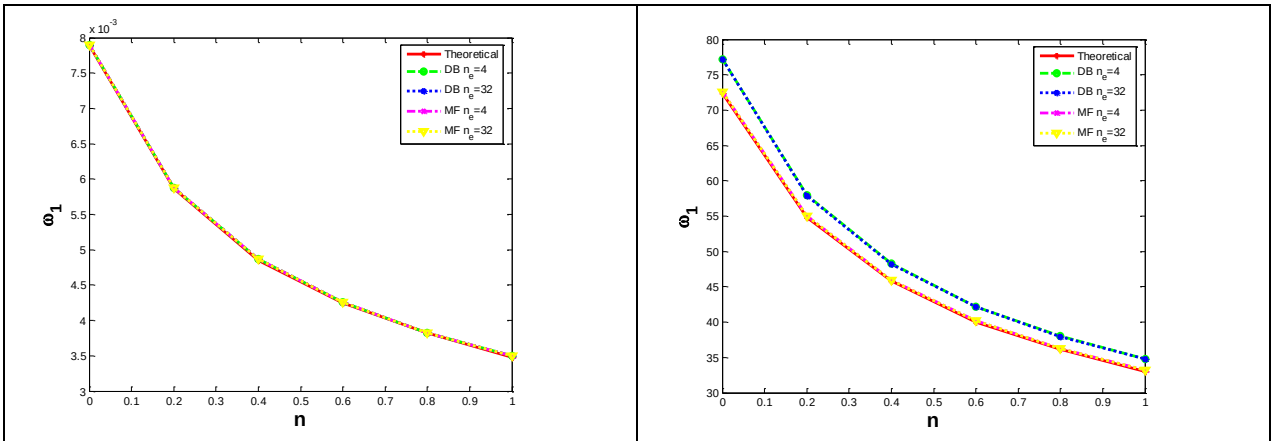
3. SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Geliştirilen elemanın tutarlı kütle matrisi de kullanılarak, ucunda kütle bulunan ve bulunmayan konsol kiriş elemanların frekanslarının tespit edilebilmesi üzerine çalışma yürütülmüştür. Literatürde kapalı form çözümleri sunulan değerler dikkate alınarak, bu çalışmada sunulan kiriş elemanı sonuçları ve Friedman ve Kosmatka (1993) tarafından türetilen elemanın titreşim sonuçları karşılaştırılmıştır.

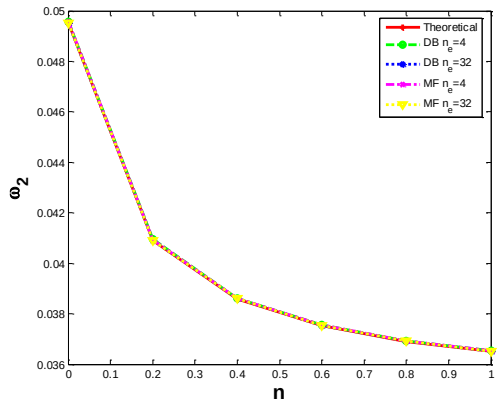
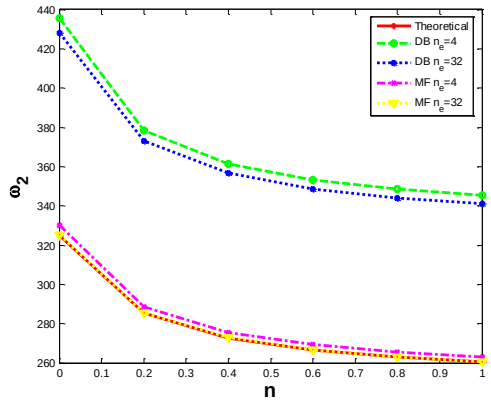
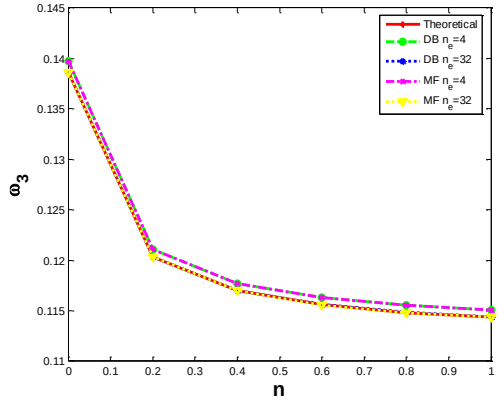
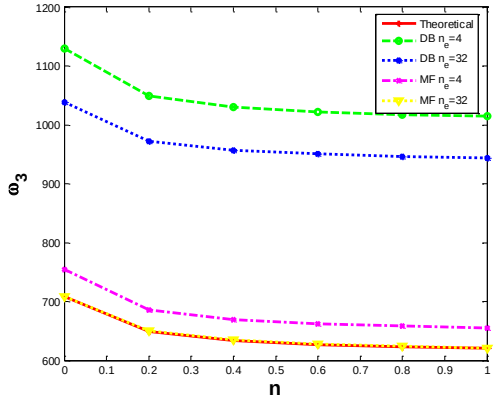
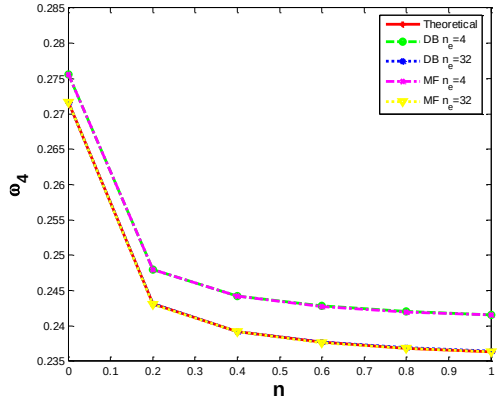
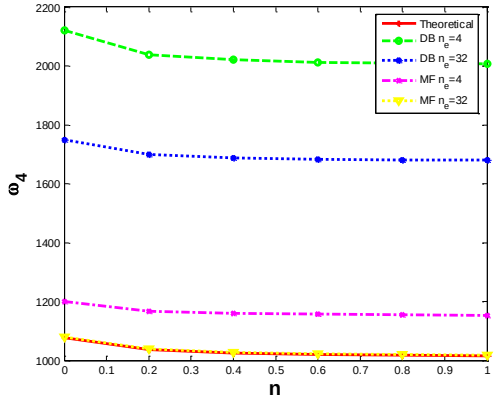
Rossi, Laura vd. (1990) ve daha sonra Karnovsky ve Lebed (2000)'in çalışmalarında yer verilen katsayılar kullanılarak belirlenmiş olan teorik serbest titreşim frekansları, ucunda yığılı kütle bulunan ve bulunmayan sabit dairesel kesitli konsol karma formülasyon (MF: mixed formulation) ve deplasman temelli (DB: displacement-based) kiriş elemanlarının ilk beş elastik titreşim frekanslarının karşılaştırılmasında kullanılmıştır. Analizler sırasında MF ve DB kirişlerin açıklığı boyunca kullanılan eleman sayısı n_e = 4 ve 32 olarak alınmıştır.

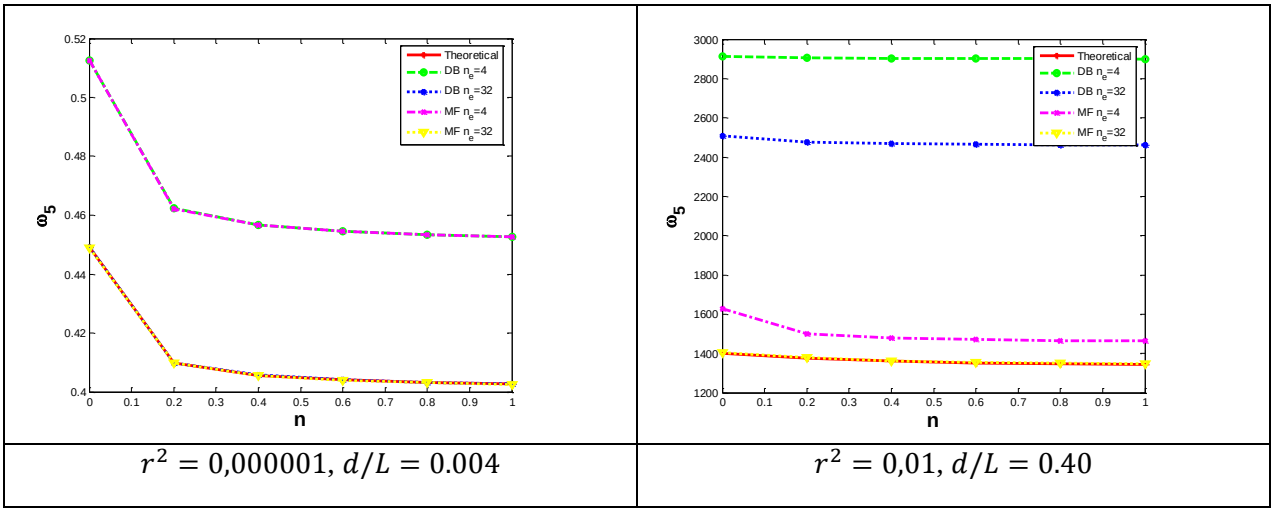
Analizlerde kullanılan elemanın çapı d=18 birim kabul edilerek elemanın uzunluğu L değiştirilmiş olup çeşitli d/L oranları için muhtelif frekans değerleri elde edilmiştir. Bu sayede kısa ve uzun kiriş örneklemi elde edilerek karma formülasyon ve deplasman temelli elemanların teorik frekans değerlerini yakalamadaki başarısı gösterilmeye çalışılmıştır. Elemanın malzemesinin çelik olduğu ve elastisite modülünün, E=29000 birim, Poisson oranının, $\nu = 0.3$, kesme düzeltme katsayısının, k = 5/6 olduğu varsayılmıştır.

Aşağıda sunulan şekillerde, $r^2 = I/(A\,L)$ ve $r^2 = 0{,}000001$ pratikte Euler-Bernoulli kiriş elemanını temsil etmekte olup uzun kiriş durumunu göstermektedir. n ise, konsol kirişin serbest ucunda bulunan ek yığılı kütlenin, kirişin kütlesine olan oranını ifade etmektedir $\left(M_{uç}/M_{kiriş}\right)$. Bu nedenle, $n = 0$, elemanın ucunda kütle bulunmayan duruma tekabül etmektedir. Analizler sonucunda ilk beş elastik titreşim frekans değerleri altı farklı d/L oranı için elde edilmiş olmasına karşın Şekil 1'deki gösterimlerde karşılaştırmaların daha etkili yapılabilmesi için yalnızca uzun kiriş durumunu temsilen d/L= 0,004 ve kısa kirşi durumunu temsilen d/L=0,40 için elde edilen ilk beş frekans değerine yer verilmiştir.



$r^2 = 0{,}000001,\ d/L = 0.004$	$r^2 = 0{,}01,\ d/L = 0.40$

	
$r^2 = 0{,}000001,\ d/L = 0.004$	$r^2 = 0{,}01,\ d/L = 0.40$
	
$r^2 = 0{,}000001,\ d/L = 0.004$	$r^2 = 0{,}01,\ d/L = 0.40$
	
$r^2 = 0{,}000001,\ d/L = 0.004$	$r^2 = 0{,}01,\ d/L = 0.40$



$r^2 = 0{,}000001, d/L = 0.004$ | $r^2 = 0{,}01, d/L = 0.40$

Şekil 1. Karma formülasyon (MF) ve deplasman temelli (DB) elemanların ilk beş titreşim frekanslarının teorik değerlerle karşılaştırılması

Şekillerden anlaşılacağı üzere, karma formülasyon (MF) elemanın temel titreşim frekansını deplasman temelli elemana (DB) nazaran teorik değere daha yakın bir şekilde elde etmesine karşın her iki eleman da düşük d/L oranı için konsol kiriş açıklığı boyunca 4 eleman kullanılması durumunda dahi yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir. Fakat, d/L'yi artırarak kısa kiriş durumuna yakınsandığında DB kiriş açıklığı boyunca 32 eleman kullanılması durumunda bile özellikle yüksek titreşim modlarındaki frekans değerlerini düzgün yakalayamamaktadır. Buna karşın MF, aynı durumda yüksek titreşim modlarında dahi başarılı bir şekilde teorik frekans değerlerine yakın sonuçlar vermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada üç boyutlu karma formülasyon ve deplasman temelli kiriş elemanları kullanılarak ucunda toplanmış kütle bulunan ve bulunmayan sabit dairesel kesitli konsol kirişin serbest titreşim frekansları bulunarak literatürdeki teorik sonuçlarla karşılaştırılmış olup karma formülasyon elemanın özellikle kısa kirişlerin yüksek titreşim frekanslarını belirlemede benzer özelliklerdeki deplasman temelli elemana nazaran daha başarılı sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada geliştirilen elemanın tutarlı kütle matrisinin türetimi de gene kuvvet temelli formülasyona dayandırılmaktadır. Böylece pek çok farklı kiriş elemanı türleri için (örneğin değişken geometri, homojen olmayan malzemeler v.s. durumları için) tutarlı kütle matrisinin hesaplanabilmesi mümkün olabilecektir. Spesifik olarak sabit kesitli homojen kiriş durumu için elde edilen tutarlı kütle matrisinin literatürde sunulan tutarlı kütle matrisi ile aynı elde edildiği tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

Archer, J. S. (1965). "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques." AIAA Journal **3**(10): 1910-1918.

Cheng, F. Y. (1970). "Vibrations of Timoshenko Beams and Frameworks." Journal of the Structural Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers.

Chopra, A. K. (2000). Dynamics of Structures : theory and applications to earthquake engineering. USA, Prentice-Hall, Inc.

Clough, R. W. ve J. Penzien (2003). Dynamics of Structures. USA, Computers & Structures, Inc.

Cook, R. D., D. S. Malkus, vd. (1989). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. United States of America, John Wiley & Sons.

Friedman, Z. ve J. B. Kosmatka (1993). "An Improved Two-Node Timoshenko Beam Finite Element." Computers & Structures **47**(3): 473-481

Grant, D. A. (1978). "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams Carrying a concentrated Mass." Journal of Sound and Vibration **57**(3): 357-365.

Huang, T. C. (1961). "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions." Journal of Applied Mechanics **28**(4): 579-584.

Huang, T. C. ve C. S. Kung (1963). "New Tables of Eigenfunctions Representing Normal Modes of Vibration of Timoshenko Beams." Developments in Theoretical and Applied Mechanics I **1**: 59-71.

Karnovsky, I. A. ve O. I. Lebed (2000). Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs and Solutions, McGraw-Hill Professional Publishing.

Leissa, A. W. ve J. So (1995). "Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses." J. Acoust. Soc. Am. **98**(4): 2122-2135.

Molins, C., P. Roca, vd. (1998). "Flexibility-based linear dynamic analyses of complex structures with curved-3d members." Earthquake Engineering and Structural Dynamics **27**: 731-747.

Przemieniecki, J. S. (1968). Theory of Matrix Structural Analysis. New York, Dover Publications, Inc.

Rossi, R. E., P. A. A. Laura, vd. (1990). "A note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non-Uniform Thickness Clamped at one End and Carrying a Concentrated mass at the other." Journal of Sound and vibration **143**(3): 491-502.

Soydas, O. ve A. Saritas (2013). "An accurate nonlinear 3d Timoshenko beam element based on Hu-Washizu functional." International Journal of Mechanical Sciences.

Swaminadham, M. ve A. Michael (1979). "A note on frequencies of a beam with a heavy tip mass." Journal of Sound and Vibration **66**(1): 144-147.

Tessler, A. ve S. B. Dong (1981). "On a Hierarchy of Conforming Timoshenko Beam Elements." Computers & Structures **14**: 335-344.

Thomas, D. L., J. M. Wilson, vd. (1973). "Timoshenko Beam Finite Elements." Journal of Sound and Vibration **31**(3): 315-330.

Timoshenko, S. P. (1921). "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Trasnverse Vibrations of Prismatic Bars." Philosophical Magazine **41**: 744-746.

Timoshenko, S. P. (1922). "On the transverse vibrations of bars of uniform cross section." Philos. Mag. **43**: 125-131.

To, C. W. S. (1982). "Vibration of a Cantilever Beam with a Base Excitation and Tip Mass." Journal of Sound and Vibration **83**(4): 445-460.