DİNAMİK ANALİZ PROBLEMLERİ İÇİN YENİ BİR ADIM ADIM SAYISAL ÇÖZÜMLEME YÖNTEMİ

H. Çilsalar[1] ve K. Aydın[2]

[1] *Yüksek Lisans Öğrencisi, İnşaat Müh. Bölümü, Erciyes Üniversitesi, Kayseri*
[2] *Doçent Doktor, İnşaat Müh. Bölümü, Erciyes Üniversitesi, Kayseri*
Email: huseyincilsalar@gmail.com

ÖZET:

Dinamik bir sistemin matematik modelinin oluşturulması sonucunda, sistemin davranışı temsil eden ikinci dereceden adi diferansiyel denklem elde edilmektedir. Ancak bu denklem her sistem için analitik olarak çözülememektedir. Bu tür sistemlerin çözümü, ancak nümerik integrasyon yöntemleri ile yaklaşık olarak yapılmaktadır. Bu çalışmada, ikinci dereceden adi diferansiyel denklem olan dinamik hareket denkleminin nümerik çözümü için yeni bir yöntem sunulmuştur. Çözüm algoritmasında D'alembert prensibi ile elde edilen diferansiyel denklemin yanı sıra, impuls-momentum ilkesi de kullanılmıştır. Analitik çözümü bulunan sistemler için yapılan zaman tanım alanında analizlerde, önerilen yöntemin klasik yöntemlere (Newmark, Wilson vb.) göre daha az hata içerdiği, sistem davranışını gerçeğe daha çok yakın bir şekilde yansıttığı gözlenmiştir. Bu nedenle deprem gibi zamana bağlı olarak ifade edilemeyen kuvvetler altında ve/veya nonlineer olarak yapılacak analizlerde, elde edilen algoritma gerçek davranışa daha yakın sonuçlar verecektir. Çalışmada, analitik çözümü bulunan sistemlerden elde edilen sonuçlar, önerilen yöntem ve kullanılan diğer birkaç yöntemden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Nümerik ve analitik çözümlerin farkı gösterilerek önerilen yöntemin stabilitesi araştırılmıştır ve ayrıca farklı zaman adımı değerlerine bağlı olarak periyot uzaması ve genlik azalması değerleri diğer yöntemler ile kıyaslanmıştır.

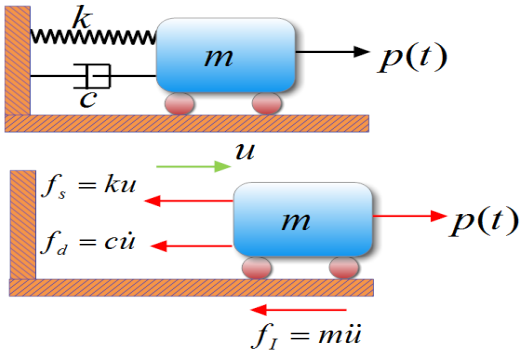
ANAHTAR KELİMELER: Nümerik integrasyon, dinamik hareket denklemi, diferansiyel denklem, zaman tanım alanı.

1.GİRİŞ

Dinamik analiz birçok bilim (fizik, uzay bilimleri vs.) ve mühendislik dalının kapsamına giren bir konudur. Dinamik etkenlerden kaynaklanan problemler, günlük hayatta her alanda karşımıza çıkabilecek problemlerdendir. Dinamik problemlere, statik problemlere oranla daha sık karşılaşılmasına rağmen, çözümleri, statik problemlerinkinden daha zordur. Bunun sebebi; hareket sonucu oluşan atalet kuvvetlerinin dinamik hareket denklemlerinde bulunmasıdır. Ayrıca sisteme etkiyen yüklerin tam olarak bilinememesi veya bu yüklerin zamanla fonksiyonel olmayan bir şekilde değişmesi, dinamik problemlerim çözümünü zorlaştırmaktadır.

Yapı dinamiği ve deprem mühendisliğinde karşılaşılan dinamik analiz problemlerin çözümünde genellikle iki yöntem kullanılır; modal analiz ve zaman tanım alanında hesap. Modal analiz yönteminde sistemin yer değiştirmesi, iki parametrenin çarpımı ile elde edilir. Bu parametrelerden biri sadece zamana göre değişirken diğeri sadece koordinat sistemine göre değişir. Bu iki parametre hesap edildikten sonra yer değiştirme, hız ve ivme belirlenir. Zaman tanım alanında hesap yönteminde ise dinamik diferansiyel denklemi analitik veya nümerik olarak çözülür. Bu yöntemde istenen her bir dinamik parametre doğrudan bulunabilir. Lineer sistemler için bu her iki yöntem de kullanılabilirken, lineer olmayan sistemlerin dinamik çözümü sadece ikinci yöntem kullanılarak belirlenebilir.

Zamana bağlı yüklere maruz sistemlerin davranışı, sistemde bulunan atalet ve sönüm kuvvetlerinden dolayı diferansiyel denklem ile ifade edilir. Bu denklemin elde edilmesi için ise ilk önce sistemin matematiksel modeli oluşturulur ve daha sonra denge denklemi kullanılır.

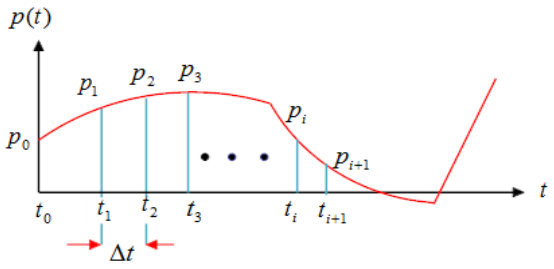


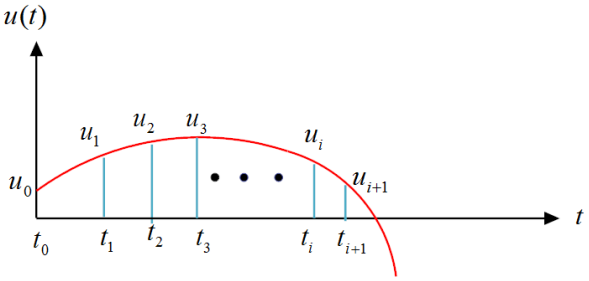
Şekil 1. Tek serbestlik dereceli bir sistemin matematiksel modeli

Şekil 1'de verilen sistemde D'lambert prensibi kullanılarak denge denklemi yazılırsa sistemin davranışını temsil eden denklem elde edilir.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{1}$$

Denklem (1)' de *m*, *c*, *k* sırasıyla; kütle, viskoz sönüm katsayısı ve hareket doğrultusundaki toplam rijitliği temsil etmektedir. Sistemin analizi için denklem (1) çözülmelidir. Tek serbestlik dereceli bir sistem için analitik çözüm, dış yük vektörü veya yer ivmesi zamandan bağımsız ise ya da sistem lineer değilse genellikle mümkün değildir (Chopra, 2007). Bu tür problemler ise hareket denkleminin nümerik integrasyonu ile çözülebilir. Nümerik çözüm ise yük fonksiyonunun interpolasyonu, Duhammel integralinin nümerik hesabı, sonlu farklar yöntemi yada belli bir zaman adımında ivme değişimi kabulünü esas alan yöntemlerden herhangi biri ile yapılabilir. İvme değişimi kabulü yapılan yöntemlerde analiz yapılacak süre, belli adım sayılarına bölünür ve her adımda sistem için anlık denge denklemi yazılır ve denklemde zamana bağlı olan terimler bulunur. Bu işlem her adım için tekrarlanır. Nümerik integrasyon yöntemlerinin gösterimi Şekil (2)'de verildiği gibidir. Zaman adımı aralığı (Δt) lineer çözümde her zaman sabit alınabilir. Ancak lineer olmayan analizlerde hızın değişimine bağlı olarak bu adımın, kendi içerisinde alt adımlara bölünerek hesap yapılması gerekebilir.





Şekil 2. Adım adım çözümlemenin grafik olarak gösterimi

Nümerik integrasyon yöntemleri Şekil (2)'de verildiği gibi her bir adımdaki değişken parametreleri hesap ederek, her bir p_i kuvvetine karşılık u_i, $\dot{u}_i$, $\ddot{u}_i$ değerlerini bularak, sistem davranışını analiz etmek için kullanılır.

Nümerik integrasyon üzerinde çokça çalışılmış ve bir çok yöntem önerilmiş olan bir konudur. Önerilen yöntemlerin ise bir çoğu Newmark yöntemlerini (Newmark, 1959) esas almıştır ve bazı durumlarda önerilen yöntemlerin algoritması Newmark yöntemleri ile çakışmaktadır. Örneğin Wilson θ yöntemi (Wilson vd., 1973) Newmark lineer ivme yönteminin bir türevidir. Bu yöntem invemin genişletilmiş bir aralıkta $(\theta\Delta t)$ lineer olarak değiştiği kabulüne dayanır (Humar, 2002). θ faktörünün 1 alınması durumunda ise Wilson θ yöntemi Newmark lineer ivme yöntemine eşit olur (Kontoe, 2006). Ancak ivme değişimi kabulünü daha üst derecen yapıldığı çalışmalarda mevcuttur. Ravazi (Ravazi vd., 2007) tarafından yapılan çalışma ivme değişimi ikinci dereceden parabol kabul edilmiş ve polinom katsayıları, denge denklemi, ağırlıklı kalanlar yöntemi ve başlangıç koşulları ile hesaplanmıştır.

Bu çalışmada ise ivmenin belli bir zaman adımına göre değişim kabulü yapılarak yöntem önerilmiş ve stabilitesi araştırılmıştır. Önerilen yöntem için herhangi bir adımdaki ivme değişimi üçüncü dereceden parabol kabul edilmiştir. Yer değiştirme fonksiyonu ise beşinci dereceden paraboldür. Bu nedenle yer değiştirme fonksiyonunda altı adet bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenler ise herhangi bir adımın başlangıç şartları, kuvvet denge denklemi, impuls-momentum prensibi ve ağırlıklı kalanlar yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır.

2. ÖNERİLEN YÖNTEM

Denklem (1), tek serbestlik dereceli sistemin davranışını temsil eden ikinci derecen adi diferansiyel denklemdir ve $\ddot{u},\dot{u},u$ ivme, hız ve yer değiştirmeyi ifade eder. Denklem(1) zamana göre integre edilirse denklem (2) elde edilir ve bu denklem sistemdeki momentum değişimini gösteriri. Burada i herhangi bir adım sayısı, q yer değiştirme değerini, I ise yük vektörünün zamana bağlı integralidir.

$$m\Delta\dot{u}_i + c\Delta u_i + k\Delta q_i = I_i \tag{2}$$

Δq fonksiyonu için denklem (3) de verilen değer yazılırsa türevler ile yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bulunur. ($0 < \tau \le \Delta t$)

$$\Delta q(\tau) = a_i\tau^6 + b_i\tau^5 + c_i\tau^4 + d_i\tau^3 + e_i\tau^2 + f_i\tau \tag{3}$$

$$u(\tau) = 6a_i\tau^5 + 5b_i\tau^4 + 4c_i\tau^3 + 3d_i\tau^2 + 2e_i\tau + f_i \quad (4)$$

$$\dot{u}(\tau) = 30a_i\tau^4 + 20b_i\tau^3 + 12c_i\tau^2 + 6d_i\tau + 2e_i \quad (5)$$

$$\ddot{u}(\tau) = 120a_i\tau^3 + 60b_i\tau^2 + 24c_i\tau + 6d_i \quad (6)$$

Denklem (3), (4) ve (5)'de $\tau = 0$ olduğu anda elde edilen değer o adımdaki başlangıç değerine eşit olur.

$$u(\tau = 0) = f_i = u_i \quad (7)$$

$$\dot{u}(\tau = 0) = 2e_i = \dot{u}_i \quad (8)$$

$$\ddot{u}(\tau = 0) = 6d_i = \ddot{u}_i \quad (9)$$

Genel hareket denkleminden hız ve yer değiştirme yerine yazılarak d katsayısı bulunur.

$$m6d_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i \quad (10)$$

$$d_i = (p_i - c\dot{u}_i - ku_i)/(6m) \quad (11)$$

Diğer katsayılar için ise hareket denklemi, impuls-momentum prensibi ve ağırlıklı kalanlar yöntemi kullanılarak bilinmeyen üç katsayı hesaplanır. Ağırlıklı kalan ise impuls-momentum denklemi kullanılarak bulunur.

$$R = I_i - m\Delta\dot{u}_i - c\Delta u_i - k\Delta q_i \quad (12)$$

$$\int_0^{\Delta t} 1R = 0 \quad (13)$$

Katsayıların hesabı denklem (14) ile yapılır.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \end{bmatrix} \quad (14)$$

α ve β matrislerinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\alpha_{11} = 120m\tau^3 + 30c\tau^4 + 6k\tau^5 \quad (15)$$

$$\alpha_{12} = 60m\tau^2 + 20c\tau^3 + 5k\tau^4 \quad (16)$$

$$\alpha_{13} = 24m\tau + 12c\tau^2 + 4k\tau^3 \tag{17}$$

$$\alpha_{21} = 30m\tau^4 + 6c\tau^5 + k\tau^6 \tag{18}$$

$$\alpha_{22} = 20m\tau^3 + 5c\tau^4 + k\tau^5 \tag{19}$$

$$\alpha_{23} = 12m\tau^2 + 4c\tau^3 + k\tau^4 \tag{20}$$

$$\alpha_{31} = 6m\tau^5 + c\tau^6 + (1/7)k\tau^7 \tag{21}$$

$$\alpha_{32} = 5m\tau^4 + c\tau^5 + (1/6)k\tau^6 \tag{22}$$

$$\alpha_{33} = 4m\tau^3 + c\tau^4 + (1/5)k\tau^5 \tag{23}$$

$$\beta_{11} = p_{i+1} - d_i(6m + 6c\tau + 3k\tau^2) - e_i(2c + 2k\tau) - kp_i \tag{24}$$

$$\beta_{21} = I_i - d_i(6m\tau + 3c\tau^2 + k\tau^3) - e_i(2c\tau + k\tau^2) - k\tau p_i \tag{25}$$

$$\beta_{31} = Z_i - d_i(3m\tau^2 + c\tau^3 + (1/4)k\tau^4) - e_i(c\tau^2 + (1/3)k\tau^3) - 0.5k\tau^2 p_i \tag{26}$$

Denklem (26)' da *Z* yük vektörünün zamana göre ikinci integralidir.

3. YÖNTEMİN DOĞRULUK VE STABİLİTE ANALİZİ

Nümerik bir çözüm yönteminin geçerli olabilmesi için aşağıda verilen üç şarta sahip olması gerekir (Chopra, 2007).

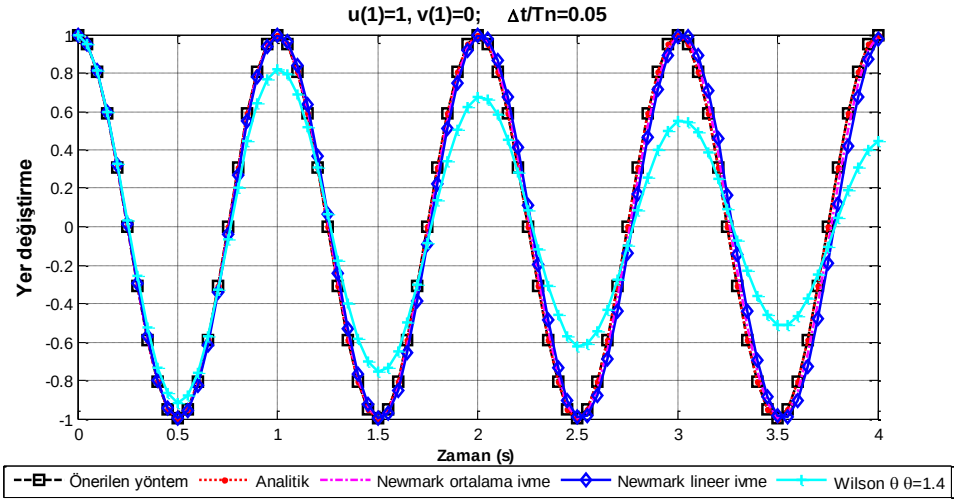
1) *Stabilite*: Çözüm yöntemi nümerik hataları olsa dahi stabil olmalıdır. Elde edilen sonuçlar gerçek davranıştan uzak olmamalıdır.

2) *Yakınsama*: Zaman adımı aralığı azaldıkça elde edilen sonuçlar analitik çözüme yaklaşmalıdır.

3) *Doğruluk*: Yöntemden elde edilen sonuçlar analitik çözüme olabildiğince yakın olmalıdır.

Yukarıda verilmiş olan üç şart nümerik çözüm yönteminin geçerliliğini belirler. İkinci şart genellikle tüm nümerik çözüm yöntemlerinde sağlanır. Üçüncü şart ise yapılan kabuller veya sonlu farklar yöntemi kullanılan terimlerin sayısı ile yakından alakalıdır.

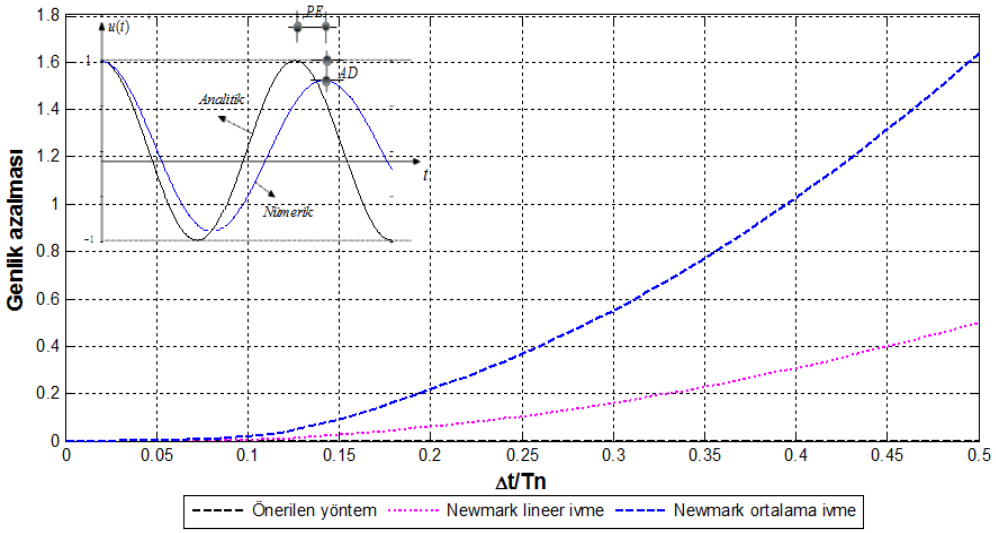
Şekil (3), sönümsüz serbest titreşim yapan bir sistemin yer değiştirme zaman grafiğini göstermektedir. Önerilen yöntem diğer yöntemlere göre analitik çözüme daha yakındır. Wilson yönteminde ise hareket genliği zamanla azalmıştır. Sistemde fiziksel sönüm olmadığı halde Wilson yönteminden elde edilen sonuçlar zamanla genlik kaybetmiştir. Bu duruma nümerik sönüm adı verilir. Stabilite ise çözüm yönteminin yaklaşım operatörü olarak tanımlanan $[A]$ matrisinin en büyük özdeğeri ile ilişkilidir.



Şekil 3. Analitik çözümü $\cos(2\pi t)$ olan bir sistemin farklı yöntemlere göre elde edilen yer değiştirme grafiği

Nümerik integrasyonun doğruluğu genellikle, yükleme, sistemin fiziksel parametreleri ve zaman adımına bağlıdır (Wilson ve Bathe, 1973). Zaman aralığı küçüldükçe çoğu yöntem analitik çözüme yaklaşır. Ancak büyük zaman adımı aralıklarında ise ıraksama meydana gelebilir.

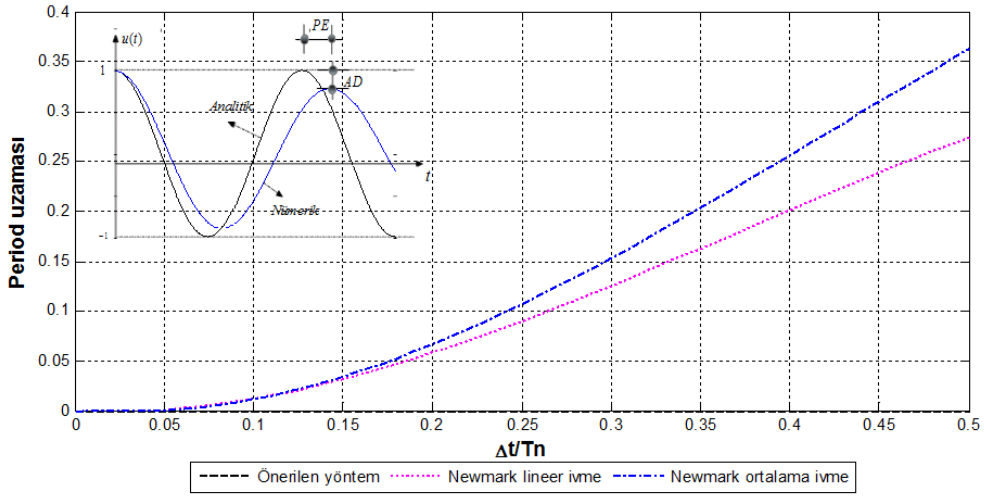
Sönümsüz serbest titreşim yapan bir sistem düşünüldüğünde her bir periyot değerinde elde edilen yer değiştirme değeri hareketin genlik değerine eşit olmalıdır. Ancak zaman aralığı büyürse bu genlik değerinden farklı bir değer elde edilir. Bu durum ise genlik azalması olarak adlandırılır.



Şekil 4. Farklı yöntemlerin genlik azalması değerleri

Sönümsüz serbest titreşim yapan bir sistemde yer değiştirme değerleri her bir periyot anında maksimum değerine ulaşır. Örneğin; analitik çözümü $\cos(2\pi t)$ olan bir sistemde her 1 saniye ve katlarında yer değiştirme

değeri 1 br olmalıdır. Eğer bu maksimum yer değiştirmeye periyot anından daha farklı bir anda ulaşılırsa bu durum periyot uzaması olarak adlandırılır.



Şekil 5. Farklı yöntemlerin period uzaması değerleri

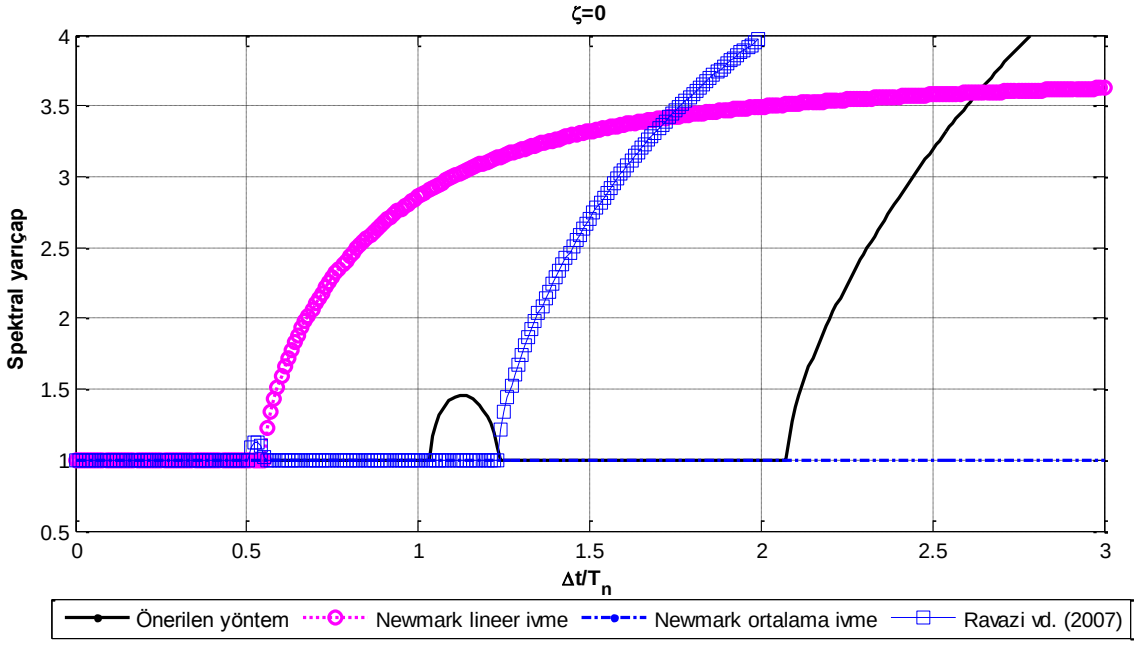
Şekil 4 ve 5'te periyot uzaması ve genlik azalması şematik olarak gösterilmiştir. PE periyot uzaması ve AD genlik azalmasını temsil eder.

Yöntemin stabilitesinin araştırılması için tek serbestlik dereceli sönümsüz serbest titreşim yapan sistem düşünülmüştür ve yaklaşım operatörü elde edilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix} \tag{27}$$

Denklem (27)' de A matrisi (yaklaşım operatörü) ile $i.$ adımdaki yer değiştirme ve hız değerleri çarpılırsa bir sonraki adımdaki değerler doğrudan bulunabilir. Burada A matrisinin her bir elemanı zamandan bağımsız, sabit bir değerdedir. Stabilite analizi için A matrisinin öz değerlerinden yararlanılır. Eğer A matrisinin en büyük öz değeri 1 den büyük ise elde edilen sonuçlar giderek artacak ve kontrol edilemez değerlere ulaşılır.

Eğer $\rho(A) = \max(\|\lambda_1\|, \|\lambda_2\|)$ olarak ifade edilirse, stabil değerler elde etmek için $\rho(A) \le 1$ olmalıdır. Bunun sağlanmadığı durumlarda ise elde edilen sonuçlar her bir döngüde artarak büyür. Eğer herhangi bir nümerik çözüm yöntemi $\lim_{\omega \to \infty}$, $\rho(A) \le 1$ şartını sağlarsa yöntem her koşulda dengeli olarak adlandırılır. Bu şart sağlanmaz ise yöntem koşullu dengeli olarak adlandırılır.



Şekil 6. Farklı yöntemlerin spektral yarıçap değerlerinin zaman aralığına bağlı gösterimi

Şekil 6'da Newmark yöntemleri ve önerilen yöntemin spektral yarıçap değerleri ($\rho(A)$) gösterilmiştir. Şekilde gösterildiği gibi Newmark lineer ivme yöntemi $\Delta t / T_n$ oranının 0.551'den büyük olduğu durumlarda ıraksama gösterecek ve anlamsız sonuçlar verecektir. Newmark lineer ivme yöntemi, ortalama ivme yönteminden daha doğru sonuçlar vermesine karşın bu özelliğinden dolayı bazı analizlerde tercih edilmez. Önerilen yöntemde ise $1.03 \le \Delta t / T_n \le 1.23$ aralığında yerel stabilite bozukluğu vardır. $\Delta t / T_n \ge 2.07$ olduğu durumlarda ise stabilite tamamen bozulmuştur. Ancak bu oran lineer ivme yöntemine göre çok daha büyüktür.

4. SONUÇLAR

Önerilen yöntem özellikle geniş zaman aralıklarında klasik yöntemlere üstünlüğü mevcuttur. Yöntemin periyot uzaması ve genlik azalması değeri $0 \le \Delta t / T_n \le 0.5$ aralığında karşılaştırılan yöntemlere göre çok çok azdır. Yöntem tek adımda hesap yapmaktadır. Yerel stabilite bozukluğu mevcut olmasına rağmen stabil olduğu aralıklar diğer yöntemlere göre çok geniştir.

KAYNAKLAR

Chopra, A. (2007) . Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Newmark, N. M..(1959) A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **85:3,** 67–94.

Wilson E.L., Farhoomand I., Bathe K.J. (1973) , Non-linear Dynamics analysis of complex structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **1:3,** 241-252.

Kontoe, S., (2006) Development of time integration schemes and advenced boundary conditions for dynamic geotechnical analysis,(Ph.D.), Imperial college of science, technology and medicine,London

Razavi, S. H., Abolmaali, A., Ghassemieh, M., A. (2007) . Weighted residual parabolic acceleration timeintegration method for problems in structural dynamics, *Computational Methods in Applied Mathematics*,**7:3,** 227–238.

Bathe, K. J.,Wilson, E.L. (1973). Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **1:3,** 283–291.

Humar, J. L.(2002). Dynamics of Structures, 2nd edn, A, A. Balkema Publishers in Lisse, Exton, PA.